المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2009

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات (x,y) من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ مع $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

0,25 ن | ① (أ) بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 ن | (ب) بين أن $(\mathcal{F},\times)$ زمرة غير تبادلية .

1,00 ن | ② لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من $\mathcal{F}$ حيث $x\epsilon\mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{F},\times)$.

0,50 ن | ③ ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\epsilon E) \; ; \; (\forall(a,b)\epsilon E) \; : \; (x,y) \perp (a,b) = \left(ax \, , bx + \frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\varphi \; : \; (\mathcal{F},\times) \to (E,\perp)$$
$$M(x,y) \to \varphi\big(M(x,y)\big) = (x,y)$$

0,25 ن | (أ) أحسب : $(2,3) \perp (1,1)$ و $(1,1) \perp (2,3)$.

0,50 ن | (ب) بين أن φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن | (ج) استنتج بنية $(E,\perp)$.

التمرين الثاني : (4,0 ن)

m عدد عقدي يخالف 1 .

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z . $(E) \; : \; z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$

0,25 ن | ① (أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$.

0,25 ن | (ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1	0,50 ن
2) نضع $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.	1,00 ن
(II) في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .	
المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.	
نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي : m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.	
1) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 نقط مستقيمية.	0,50 ن
2) أ) بين أن التحويل $\mathcal{R}$ الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.	0,50 ن
ب) بين أن العدد العقدي : $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان : $\Re e(m) + \Im m(m) = 1$ ($\Re e(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\Im m(m)$ هو جزءه التخيلي)	0,50 ن
ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .	0,50 ن
التمرين الثالث : (3,0 ن) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.	
1) أ) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$.	0,25 ن
ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$.	0,50 ن
2) ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$.	
أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$.	0,75 ن
ب) بين أن p يقسم a_{p-2} .	0,75 ن
ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$. ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q .)	0,50 ن
التمرين الرابع : (10 ن) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .	
نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي . $f_n(0) = 0$ و $(\forall x > 0)\ ;\ f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$	
(I) ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.	
1) أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 (يمكن وضع $x = t^n$).	0,50 ن
ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 .	0,25 ن
ج) حدد النهايات التالية : $\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ و $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$	1,00 ن

② ⓐ أدرس تغيرات الدالة f_1 .	0,50 ن
ⓑ أدرس تغيرات الدالة f_2 .	0,50 ن
③ ⓐ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.	0,25 ن
ⓑ أنشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_2)$) نأخذ : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$	0,50 ن
(II) نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$	
① ⓐ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$. وأن : $(\forall x < 0)\ ;\ F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$	0,50 ن
ⓑ استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال : $]-\infty, 0]$	0,25 ن
② ⓐ بين أن : $(\forall x < 0)\ ;\ \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\, dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\, dt$	0,25 ن
ⓑ تحقق أن الدالة : $x \to x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$.	0,25 ن
ⓒ بين أن : $\lim_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)\, dt = \frac{3}{4}$	0,25 ن
③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$	0,25 ن
(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_{1}^{e} f_n(x) dx$	
① ⓐ بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_n \geq 0$.	0,50 ن
ⓑ حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$.	0,50 ن
ⓒ بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} \leq u_n$.	0,25 ن
ⓓ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .	0,25 ن
② ⓐ بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$	0,50 ن
ⓑ استنتج بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$.	0,50 ن
③ ⓐ بين أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \frac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)}$	0,75 ن
ⓑ حدد : $\lim_{x\to+\infty} u_n$ و $\lim_{x\to+\infty} nu_n$	0,50 ن
④ a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 . نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $(\forall n \geq 1)\ ;\ v_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} v_n$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n = \lvert v_n - u_n \rvert$.	
ⓐ بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ d_n = \frac{n!}{2^{(n-1)}} d_1$	0,25 ن
ⓑ بين أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$	0,25 ن
ⓒ بين أن : $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$	0,25 ن
ⓓ استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متباعدة.	0,25 ن